ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS, Vol. 39, No. 3, 1981

QUELQUES PROPRIETES DES ESPACES DE BANACH STABLES

PAR

S. GUERRE ET J. T. LAPRESTÉ

ABSTRACT

We prove that stable Banach spaces, introduced by J. L. Krivine and B. Maurey [7], are weakly sequentially complete and that every spreading model defined on a stable Banach space is stable.

I. Introduction

On dit qu'un espace de Banach *séparable E est stable* [7] si pour toutes suites bornées (x_n) et (y_n) de E et tout ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur les entiers on a:

$$\lim_{n,\mathcal{U}}\lim_{m,\mathcal{U}}\|x_n + y_m\| = \lim_{m,\mathcal{U}}\lim_{n,\mathcal{U}}\|x_n + y_m\|.$$

La notion d'espace stable a été introduite par J. L. Krivine et B. Maurey dans [7] en vue d'étendre de la façon suivante un résultat de D. Aldous [1] concernant les sous-espaces de L^1: "tout espace stable de dimension infinie contient un sous espace presque isométrique à un espace l_p $(1 \leqq p < \infty)$".

Nous nous interessons ici à d'autres propriétés de ces espaces: on prouve que les espaces stables sont faiblement séquentiellement complets (théorème 1) et que les modèles étalés des espaces stables sont stables (théorème 2).

Rappelons quelques définitions qui figurent dans [7] et [4]: une fonction σ de E dans $\mathbf{R}^+$ est un *type sur* E s'il existe une suite bornée (a_n) de E et un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur $\mathbf{N}$ tels que, pour tout x de E, $\sigma(x) = \lim_{n,\mathcal{U}}\|x + a_n\|$. Si $\sigma(x) = \lim_{n,\mathcal{U}}\|x + a_n\|$, $\tau(x) = \lim_{m,\mathcal{U}}\|x + b_m\|$, on définit le *produit de convolution* $\sigma * \tau$ de σ et τ par:

$$\forall x \in E, \qquad \sigma * \tau(x) = \lim_{n,\mathcal{U}}\lim_{m,\mathcal{U}}\|x + a_n + b_m\|.$$

Le *produit* $\lambda\sigma$ du type σ par un scalaire λ est défini par:

Reçu le 10 juillet 1980

$$\forall x \in E, \qquad \lambda\sigma(x) = \lim_{n,\mathcal{U}} \| x + \lambda a_n \|.$$

On dira qu'un type σ est *symétrique* si pour tout x de E, $\sigma(x) = \sigma(-x)$. On sait ([7]) que l'espace des types sur un espace de Banach stable est fermé pour la convergence simple dans l'espace des fonctions de E dans $\mathbf{R}^+$, que pour $c > 0$ l'ensemble des types τ, tels que $\tau(0) \leqq c$, est compact pour cette topologie et enfin que le produit de convolution est séparément continu sur l'espace des types muni de cette topologie.

On appelle alors (cf. [5] et également [3]) *modèle étalé au-dessus de E associé à la suite* (x_n) *et à l'ultrafiltre* $\mathcal{U}$, le séparé complèté de $E \times \mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$ pour la semi-norme définie par:

$$\left\| x + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i \right\| = \lim_{n_1,\mathcal{U}} \cdots \lim_{n_k,\mathcal{U}} \left\| x + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_{n_i} \right\|,$$

si x est dans E et $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ sont des réels. Si σ est le *type associé à* (x_n) *et à* $\mathcal{U}$, ceci s'écrit encore:

$$\left\| x + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i \right\| = (\lambda_1 \sigma * \cdots * \lambda_k \sigma)(x)$$

et on dira que *chaque vecteur* e_i *réalise le type* σ *au-dessus de E* (i.e.: pour $x \in E$, $\| x + e_i \| = \sigma(x)$). La suite (e_n) ainsi construite sera appelée *suite fondamentale* du modèle étalé et l'espace de Banach $[e_i, i \in \mathbf{N}]$ qu'elle engendre *modèle étalé de E associé à* (x_n) *et à* $\mathcal{U}$; on dira encore que le modèle étalé $[e_i, i \in \mathbf{N}]$ est *associé* au type σ.

REMARQUE 1. La suite (e_n) ainsi définie est *écartable au dessus de E*, c'est-à-dire que pour toute suite croissante d'entiers (n_i) et pour tout x de E on a:

$$\left\| x + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i \right\| = \left\| x + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_{n_i} \right\|.$$

Si l'espace E est stable, cette suite est également *symétrique au-dessus de E*: pour toute permutation σ des entiers, on a $\| x + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i \| = \| x + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_{\sigma(i)} \|$. On en déduit dans ce cas que, si la suite (e_n) est *basique*, c'est une *base symétrique*, donc *inconditionnelle* du modèle étalé $[e_i, i \in \mathbf{N}]$ qu'elle engendre.

II. Le résultat principal

Montrons d'abord un lemme fondamental:

LEMME 1. *Si* $[e_i, i \in \mathbf{N}]$ *est un modèle étalé sur un espace stable* E, *associé à une suite* (x_n) *et un ultrafiltre* $\mathcal{U}$ *et tel que*:

(a) *La suite* (e_n) *est* K*-équivalente à la base canonique d'un espace* l_p $(1 \leqq p < +\infty)$.

(b) *Le type* σ *sur* E *défini par* (x_n) *et* $\mathcal{U}$ *est symétrique.*

Alors il existe une suite de blocs disjoints sur (x_n): $u_n = \sum_{i=p_n+1}^{p_{n+1}} \lambda_i x_i$, *avec* $\lambda_i \geqq 0$ *pour tout* $i \in \mathbf{N}$, *telle que*:

(1) *La suite* (u_n) *est équivalente à la base canonique de* l_p.

(2) $\forall n \in \mathbf{N}$, $(1/K^p) \leqq \sum_{i=p_n+1}^{p_{n+1}} \lambda_i^p \leqq K^p$.

DÉMONSTRATION. Considérons la classe conique C engendrée par le type σ (cf. [7]), et montrons tout d'abord que tout type τ de C tel que $\tau(0) = 1$ définit un modèle étalé dont la suite fondamentale est K^2-équivalente à la base canonique de l_p: tout type τ de C tel que $\tau(0) = 1$ est la limite simple d'une suite τ_n de types où chaque τ_n s'écrit: $\tau_n = \lambda_1^{(n)}\sigma * \cdots * \lambda_{p_n}^{(n)}\sigma$ avec $\lambda_i^{(n)} \geqq 0$ pour tout $i \leqq p_n$ et $\tau_n(0) = 1$. Cette dernière condition et l'hypothèse (a) impliquent que:

$$(*) \qquad (1/K)\left[\sum_{i=1}^{p_n} (\lambda_i^{(n)})^p\right]^{1/p} \leqq 1 \leqq K\left[\sum_{i=1}^{p_n} (\lambda_i^{(n)})^p\right]^{1/p}.$$

D'autre part, la continuité séparée du produit de convolution implique que, si $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ sont des réels fixés, on a:

$$(\alpha_1\tau * \cdots * \alpha_n\tau)(0) = \lim_{n_1, \mathcal{U}} \cdots \lim_{n_k, \mathcal{U}} (\alpha_1\tau_{n_1} * \cdots * \alpha_k\tau_{n_k})(0).$$

L'hypothèse (a) et (*) donnent alors:

$$\begin{aligned}(1/K^2)\left(\sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|^p\right)^{1/p} &\leqq 1/K\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p_{ni}} |\alpha_i\lambda_j^{(n_i)}|^p\right)^{1/p} \\ &\leqq (\alpha_1\tau_{n_1} * \cdots * \alpha_k\tau_{n_k})(0) \\ &\leqq K\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p_{ni}} |\alpha_i\lambda_j^{(n_i)}|^p\right)^{1/p} \\ &\leqq K^2\left(\sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|^p\right)^{1/p};\end{aligned}$$

d'où l'on déduit immédiatement que:

$$(1/K^2)\left(\sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|^p\right)^{1/p} \leqq (\alpha_1\tau * \cdots * \alpha_n\tau)(0) \leqq K^2\left(\sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|^p\right)^{1/p}.$$

A présent, on sait, voir [7], que C contient un l_q-type τ_0 (i.e.: $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}_+^2$, $\alpha\tau_0 * \beta\tau_0 = (\alpha^q + \beta^q)^{1/q}\tau_0$).

Donc, d'une part on a nécessairement $q = p$ et d'autre part, d'après [7], toute suite de E définissant τ_0 admet une sous-suite définissant le même type et équivalente à la base canonique de l_p. Pour terminer, il suffit de voir que τ_0 peut être défini par une suite de blocs sur (x_i) vérifiant la condition (2) du Lemme.

Comme $\tau_0 \in C$ et $\tau_0(0) = 1$, il existe une suite de types $\tau_n = \lambda_1^{(n)}\sigma * \cdots * \lambda_{p_n}^{(n)}\sigma$, avec $\lambda_i^{(n)} \geqq 0$ et $\tau_n(0) = 1$ convergeant simplement vers τ_0. En utilisant le procédé de A. Brunel et L. Sucheston (cf. [5]) il est facile de voir que l'on peut supposer que (x_n) est une bonne suite†; le type τ_n peut alors être défini par la suite de blocs: $a_k^{(n)} = \sum_{i=1}^{p_n} \lambda_i^{(n)} x_{kp_n+i}$.

Grâce à la condition $\tau_n(0) = 1$, les coefficients $\lambda_i^{(n)}$, $i \leqq p_n$ des blocs $a_k^{(n)}$ vérifient de plus pour tout entier:

$$(**) \qquad (1/K^p) \leqq \sum_{i=1}^{p_n} (\lambda_i^{(n)})^p \leqq K^p.$$

Pour $x \in E$ on a alors $\tau_0(x) = \lim_n \lim_k \|x + a_k^{(n)}\|$; par un procédé diagonal on peut trouver une suite d'entiers $(k(n))$ telle que $\tau_0(x) = \lim_n \|x + a_{k(n)}^{(n)}\|$. Quitte à extraire une sous-suite (u_n) de $(a_{k(n)}^{(n)})$ telle que les supports des u_n soient disjoints, on a bien trouvé une suite de blocs disjoints (u_n) définissant τ_0 et vérifiant la condition (2) du Lemme.

REMARQUE 2. La démonstration du Lemme 1 reste vraie si l'on remplace l_p $(1 \leqq p < +\infty)$ par c_0. Cependant, comme c_0 n'est pas un espace stable, la conclusion devient: "un espace stable E n'admet aucun modèle étalé associé à un type symétrique, dont la suite fondamentale soit équivalente à la base canonique de c_0". (Ce résultat sera étendu à la proposition 3.)

THÉORÈME 1. *Tout espace de Banach stable est faiblement séquentiellement complet; en particulier un tel espace est réflexif si et seulement si il ne contient pas de sous espace isomorphe à* l_1.

DÉMONSTRATION. Supposons qu'il existe dans l'espace de Banach stable E une suite (y_n), faiblement de Cauchy non convergente. Par extraction de sous-suite on peut supposer que (y_n) est basique (cf. [6] ou [9]) et est une bonne suite au sens de [5]; par conséquent la suite fondamentale (e_n) du modèle étalé

† (x_b) est une bonne suite si: $\forall \varepsilon > 0$, $\forall x \in E$, $\forall k \in \mathbf{N}$, $\forall (\lambda_1, \cdots, \lambda_k) \in \mathbf{R}^k$, $\exists \nu \in \mathbf{N}$ tel que:

$$\nu < n_1 < n_2 < \cdots < n_k \Rightarrow \left| \left\| x + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_{n_i} \right\| - \left\| x + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i \right\| \right| < \varepsilon.$$

associé à (y_n) est *basique inconditionnelle* (Remarque 1); de plus, si y'' est la limite faible de la suite (y_n) dans le bidual E'' de E, pour tout $(\lambda_1, \cdots, \lambda_k) \in \mathbf{R}^k$, on a:

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i \right\| = \lim_{n_1} \cdots \lim_{n_k} \left\| \sum_{i=1}^{k} \lambda_i y_{n_i} \right\| \geqq \|y''\| \left| \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \right|.$$

L'inconditionnalité de la suite (e_n) et cette inégalité prouvent alors que (e_n) est équivalente à la base canonique de l_1.

Posons $x_n = y_{2n+1} - y_{2n}$; la suite (x_n) ainsi définie converge faiblement vers 0, a un modèle étalé dont la suite fondamentale $(e_{2n+1} - e_{2n})$ est encore équivalente à la base canonique de l_1 et est associée à un type symétrique. Le Lemme 1 appliqué à la suite (x_n) prouve l'existence d'une constante $K > 0$ et d'une suite de blocs à coefficients positifs sur (x_n), $u_n = \sum_{i=p_n+1}^{p_{n+1}} \lambda_i x_i$, équivalente à la base canonique de l_1 et telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\sum_{i=p_n+1}^{p_{n+1}} \lambda_i \leqq K$. Comme cette dernière condition implique que (u_n) converge faiblement vers 0, nous obtenons une contradiction.

Remarque 3. La démonstration du théorème 1 montre qu'en outre, aucun modèle étalé d'un espace stable E associé à une suite tendant faiblement vers 0 ne peut être isomorphe à l_1, et cette propriété, d'après un résultat de [2] équivaut à dire que E possède la propriété de Banach–Saks–Rosenthal: "de toute suite convergeant faiblement vers 0 de E, on peut extraire une sous-suite dont les moyennes de Césaro convergent fortement vers 0", D'où:

Proposition 1. *Un espace stable E possède la propriété de Banach–Saks–Rosenthal.*

Une autre conséquence du Lemme 1 est la proposition suivante:

Proposition 2. *Si un espace stable E admet un modèle étalé qui contient un sous-espace isomorphe à l_p alors, E contient un sous-espace isomorphe à l_p* $(1 \leqq p < +\infty)$.

Démonstration. D'après [5] (théorème 2) on peut supposer que E a un modèle étalé dont la suite fondamentale (e_n) est basique et qui contient un sous espace isomorphe à l_p.

Par une technique standard, on peut alors trouver une suite de blocs $u_n = \sum_{i=p_n+1}^{p_{n+1}} \lambda_i e_i$ équivalente à la base canonique de l_p.

Soit τ_n, le type sur E réalisé par u_n (i.e. $\forall x \in E$, $\tau_n(x) = \|x + u_n\|$). Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que (τ_n) converge simplement vers un type τ sur E. Par définition du produit de convolution, comme (u_n) est une suite de blocs disjoints sur les (e_n), on a:

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad \forall(\alpha_1, \cdots, \alpha_k) \in \mathbf{R}^k, \quad (\alpha_1\tau * \cdots * \alpha_k\tau)(0) = \lim_{n_1, \mathcal{U}} \cdots \lim_{n_k, \mathcal{U}} \left\| \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_{n_i} \right\|,$$

ce qui prouve que la suite fondamentale du modèle étalé associé à τ est équivalente à la base canonique de l_p. Il est alors immédiat que le type symétrique $\tau * (-\tau)$ définit un modèle étalé jouissant de la même propriété et qui satisfait aux hypothèses du Lemme 1, ce qui achève la preuve.

Comme pour le Lemme 1, la démonstration de la proposition 2 s'étend sans modification au cas de c_0 et on a donc la proposition suivante:

PROPOSITION 3. *Aucun modèle étalé sur un espace stable E ne contient de sous espace isomorphe à* c_0.

III. Stabilité des extensions

Les extensions les plus naturelles d'un espace stable sont ses modèles étalés; on a le théorème suivant:

THÉORÈME 2. *Tout modèle étalé au dessus d'un espace de Banach stable est stable.*

DÉMONSTRATION. En vertu de [5] (théorème 2), il suffit de montrer ce résultat pour les modèles étalés dont la suite fondamentale est basique. Soient donc $F = E \oplus [e_i, i \in \mathbf{N}]$ un tel modèle étalé au dessus de E et (f_n), (g_m) deux suites bornées de F. Pour tous entiers m et n, on peut décomposer f_n et g_m sur E et $[e_i, i \in \mathbf{N}]$, soit: $f_n = x_n + u_n$, $g_m = y_m + v_m$ avec x_n, y_m dans E, u_n et v_m dans $[e_i, i \in \mathbf{N}]$.

On veut montrer qu'il existe deux sous-suites (f'_n) et (g'_m) de (f_n) et (g_m) vérifiant:

$$\text{(L)} \qquad \lim_{n,\mathcal{U}} \lim_{m,\mathcal{U}} \|f'_n + g'_m\| = \lim_{m,\mathcal{U}} \lim_{n,\mathcal{U}} \|f'_n + g'_m\|.$$

Supposons dans un premier temps que les supports des suites (u_n) et (v_m) sur (e_i) vérifient:

$$\text{(S)} \qquad \forall n \in \mathbf{N}, \qquad \operatorname{Supp} u_n < \operatorname{Supp} v_n < \operatorname{Supp} u_{n+1} < \operatorname{Supp} v_{n+1}.$$

On va alors montrer que pour tout $z \in F$:

$$(\mathrm{L}') \quad \lim_{n,\mathcal{U}} \lim_{m,\mathcal{U}} \| z + (x_n + u_n) + (y_m + v_m) \| = \lim_{m,\mathcal{U}} \lim_{n,\mathcal{U}} \| z + (x_n + u_n) + (y_m + v_m) \|.$$

Pour cela posons pour x dans E,

$$\sigma(x) = \lim_{n,\mathcal{U}} \| x + x_n + u_n \|,$$

$$\tau(x) = \lim_{m,\mathcal{U}} \| x + y_m + v_m \|,$$

$$\mu_z(x) = \| x + z \|;$$

σ, τ et μ_z sont des types sur E; si z s'écrit $z_1 + z_2$ avec $z_1 \in E$ et $z_2 \in [e_i, i \in \mathbf{N}]$ à support fini, dès que n et m sont assez grands, les supports de z_2, u_n, v_m sont disjoints et par conséquent, par définition du produit de convolution des types:

$$\begin{aligned} &\lim_{n,\mathcal{U}} \lim_{m,\mathcal{U}} \| z_1 + z_2 + (x_n + u_n) + (y_m + v_m) \| \\ &= (\mu_z * \sigma * \tau)(0) \\ &= \lim_{m,\mathcal{U}} \lim_{n,\mathcal{U}} \| z_1 + z_2 + (x_n + u_n) + (y_m + v_m) \|. \end{aligned}$$

Un argument de densité prouve que (L′) est vraie pour tout z de F.

Les suites (u_n) et (v_m) étant maintenant quelconques, on va se ramener au cas précédent de la manière suivante: d'après la proposition 3, l'espace $[e_i, i \in \mathbf{N}]$ ne contient pas de sous-espace isomorphe à c_0; comme la base (e_i) est inconditionnelle (Remarque 1), elle est aussi complète pour les suites bornées ("boundedly complete") ce qui implique que, de (u_n) et (v_m), on peut extraire des sous-suites (u'_n) et (v'_m) qui convergent coordonnées par coordonnées (les coordonnées étant prises sur la base (e_i)) vers des élements u et v de $[e_i, i \in \mathbf{N}]$. Par un procédé classique, on peut alors montrer qu'il existe des sous-suites $(u''_n - u)$ et $(v''_m - v)$ de $(u'_n - u)$ et $(v'_m - v)$ respectivement et des suites (u^0_n) et (v^0_m) vérifiant la condition (S) telles que:

$$\lim_n \| u^0_n - (u''_n - u) \| = 0 \quad \text{et} \quad \lim_m \| v^0_m - (v''_m - v) \| = 0.$$

En appliquant l'égalité (L′) aux suites (u^0_n) et (v^0_m) avec $z = u + v$, on en déduit que l'égalité (L) est vérifiée pour des sous-suites de (f_n) et (g_m), ce qui prouve la stabilité de F.

Ce dernier théorème reste valable pour des extensions d'un espace stable plus générales:

THÉORÈME 3. *Soit (σ_i) une suite de types sur un espace stable E et F l'espace de Banach engendré par E et une suite de vecteurs (ξ_i), la norme sur F étant définie par:*

$$\forall x \in E, \quad \forall(\lambda_1,\cdots,\lambda_k)\in \mathbf{R}^k, \quad \left\| x+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\xi_i \right\| = (\lambda_1\sigma_1 * \cdots * \lambda_k\sigma_k)(x).$$

Alors, si pour chaque $i \in \mathbf{N}$, σ_i est, ou bien un type symétrique, ou bien associé à une suite faiblement convergente de E, l'espace de Banach F est stable.

BIBLIOGRAPHIE

1. D. Aldous, *Subspaces of L^1 via random measure*, preprint.

2. B. Beauzamy, *Banach space properties and spreading models*, Math. Scand. **44** (1979), 357–384.

3. A. Brunel et L. Sucheston, *On B-convex Banach spaces*, Math. Systems Theory **7** (1973), 294–299.

4. S. Guerre et J. T. Lapresté, *Quelques propriétés des espaces stables*, C. R. Acad. Sci. Paris **A290** (1980), 645.

5. S. Guerre et J. T. Lapresté, *Quelques propriétés modèles étalés sur un espace de Banach*, à paraître aux Ann. Inst. H. Poincaré.

6. M. I. Kadets et A. Pelczynski, *Basic sequences and biorthogonal systems and norming sets in Banach spaces*, Studia Math. **25** (1965), 297–323 (en russe).

7. J. L. Krivine et B. Maurey, *Espaces de Banach stables*, Note de C. R. Acad. Sci. Paris A **289** (1979), 679.

8. J. T. Lapresté, *Suites écartables dans les espaces de Banach*, Exposé XX, Séminaire Schwartz — Ecole Polytechnique, 1977–1978.

9. V. D. Mil'man, *Geometric theory of Banach spaces (Part I)*, Russian Math. Surveys **25** (1970), 111–170.

UNIVERSITÉ PARIS VI
EQUIPE D'ANALYSE FONCTIONNELLE
4, PLACE JUSSIEU
75230 PARIS CEDEX 05, FRANCE

UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES
B. P. 45
63170 AUBIERE, FRANCE